

4.6.7 Rezonance sériového RLC obvodu

Předpoklady: 4606

Výsledky posledního příkladu z minulé hodiny (sériový obvod s rezistorem, ideální cívkou a kondenzátorem).

frekvence f	celková impedance Z	fázový posun φ	proud I
50 Hz	60	$-87^{\circ}37'$	0,083
100 Hz	24,4	$-85^{\circ}18'$	0,21
200 Hz	2,17	$-22^{\circ}41'$	1,89
300 Hz	12,2	$80^{\circ}33'$	0,41
500 Hz	31,4	$86^{\circ}21'$	0,16

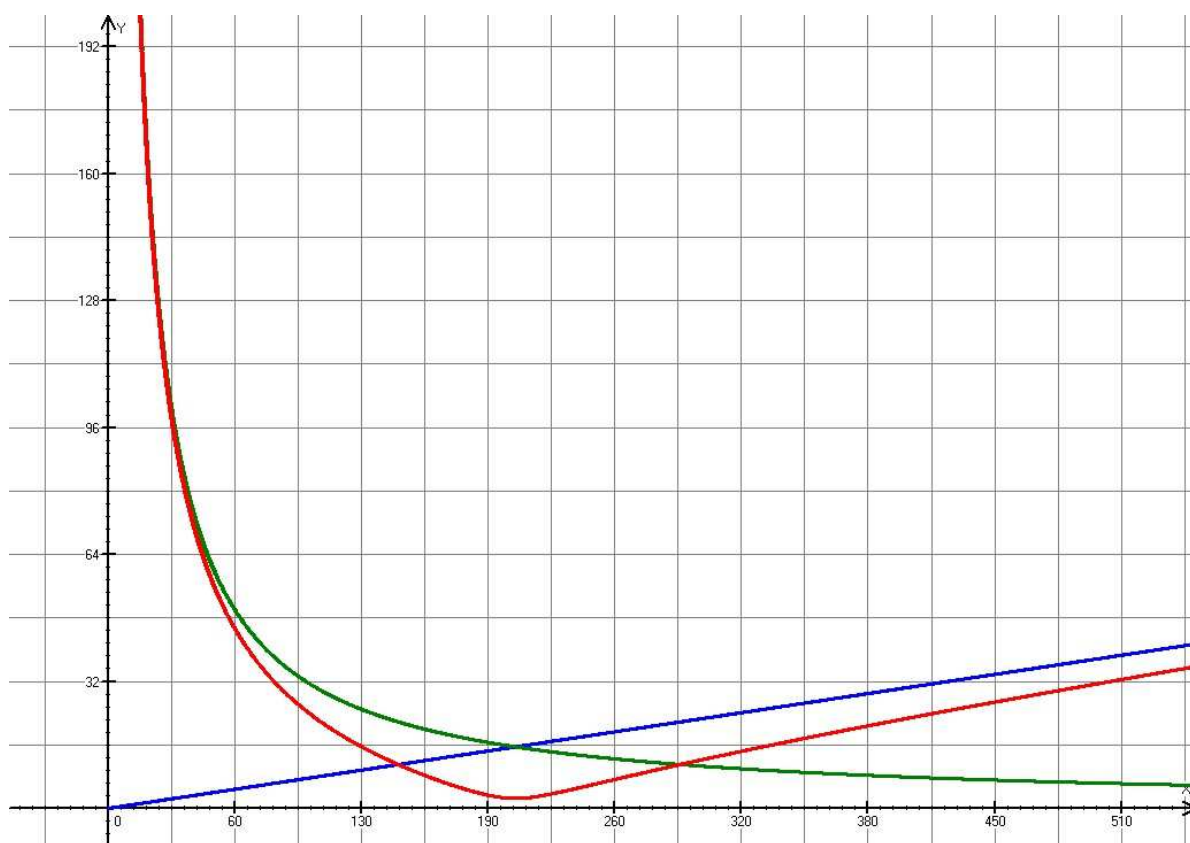
Z tabulky je vidět, že se vzrůstající frekvencí nejdříve impedance klesá a pak zase roste. Záporná hodnota fázového posunu se zmenšuje a pak začne narůstat do kladných hodnot.

Je to logické:

- při frekvenci 50 Hz je větší kapacitance kondenzátoru než induktance cívky, proto se obvod chová jako kondenzátor (záporný fázový posun),
- s rostoucí frekvencí se kapacitance kondenzátoru zmenšuje a induktance cívky roste $\Rightarrow$ při určité frekvenci se vyrovnají (a navzájem vyruší) $\Rightarrow$ impedance obvodu se rovná odporu rezistoru, fázový posun je v tomto okamžiku nulový,
- při dalším zvyšování frekvence induktance dále roste (kapacitance se dále zmenšuje) $\Rightarrow$ obvod se chová jako cívka (kladný fázový posun).

Ještě lépe to bude vidět z grafů:

Graf závislosti induktance, kapacitance a impedance na frekvenci



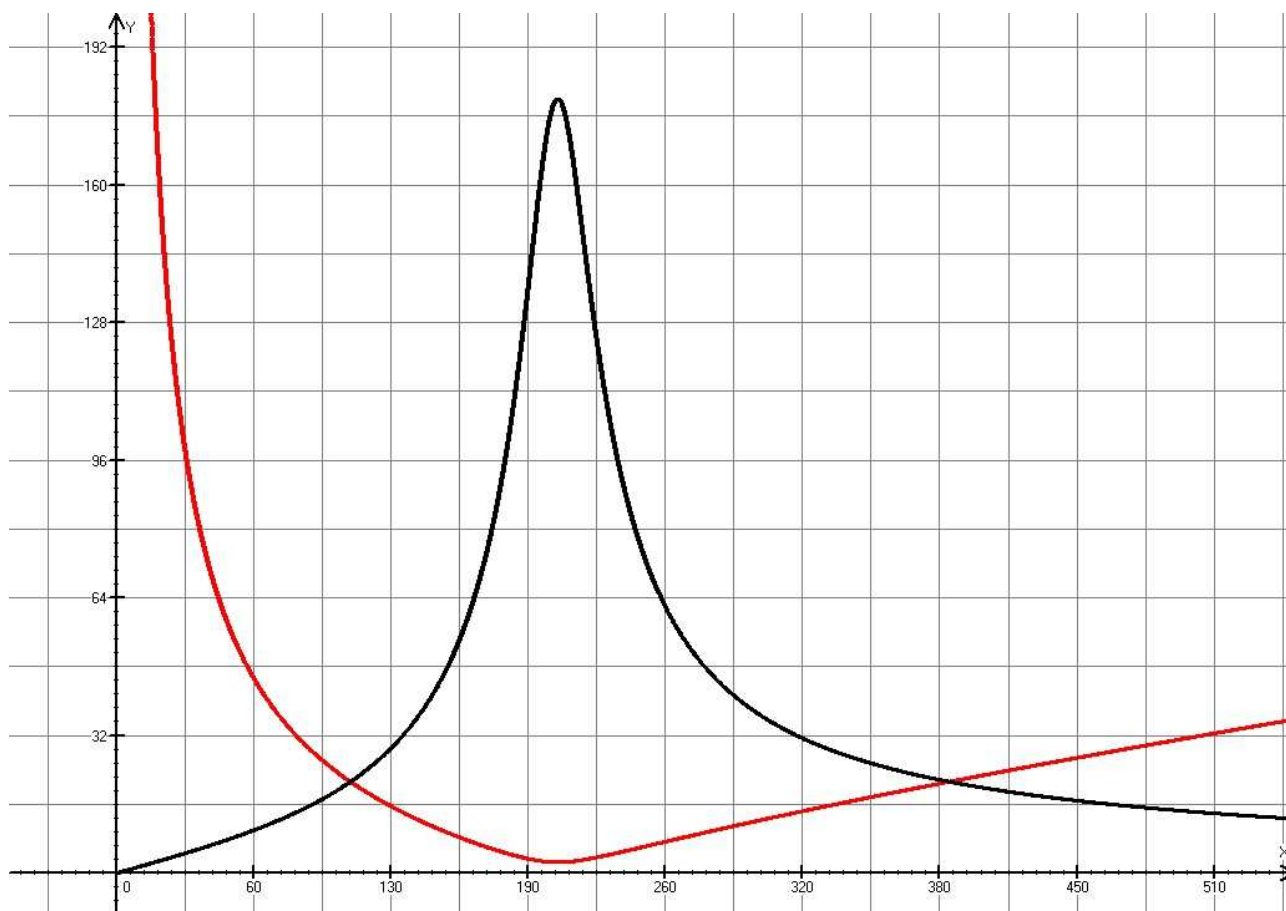
Př. 1: Urči barvy, kterými jsou na předchozím grafu zakresleny jednotlivé veličiny (kapacitance, induktance a impedance).

Induktance s frekvencí roste přímo úměrně $\Rightarrow$ je nakreslena modrou barvou.

Kapacitance s frekvencí klesá nepřímo úměrně $\Rightarrow$ je nakreslena zeleně.

Impedance nejdříve klesá, pak opět roste $\Rightarrow$ je nakreslena červeně.

Na hodnotě impedance samozřejmě závisí velikost procházejícího proudu, která je největší při nejmenší impedanci.



Frekvenci, při které je impedance minimální a procházející proud maximální, nazýváme **rezonanční frekvence**.

Př. 2: Odvoď vztah pro rezonanční frekvenci sériového RLC obvodu.

K rezonanci dochází, když se kapacitance rovná induktanci (vliv cívky a kondenzátoru se navzájem vyruší).

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Získaný vzorec $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ se nazývá **Thomsonův vztah**.

Dodatek: V tabulkách bývá někdy uveden i tvar $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Př. 3: Urči rezonanční frekvenci sériového obvodu s rezistorem $2,5 \Omega$, ideální cívkou $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $50 \mu\text{F}$. Porovnej výsledek s grafy z úvodu hodiny.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,012 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} \text{ Hz} = 205 \text{ Hz}$$

Výsledná frekvence odpovídá údajům ze začátku hodiny (rezonanční frekvence se musí nacházet mezi 100 a 300 Hz, graf impedance má minimum kolem hodnoty 200 Hz).

Př. 4: V obvodu je sériově zapojena reálná cívka a kondenzátor $220 \mu F$. Urči parametry cívky, pokud při rezonanci protékal obvodem připojeným k napětí 5 V 60 Hz proud 0,45 A.

Reálná cívka má kromě indukčnosti i odpor.

Rezananční frekvence je určena kapacitou kondenzátoru a indukčností cívky:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi f_0}$$

$$LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 60^2 \cdot 220 \cdot 10^{-6}} \text{ H} = 0,032 \text{ H}$$

Při rezonanci omezuje proud v obvodu pouze ohmický odpor: $R = \frac{U}{I} = \frac{5}{0,45} \Omega = 11 \Omega$.

Cívka zapojená do obvodu má odpor 11Ω a indukčnost $0,032 \text{ H}$.

Př. 5: Kolikrát se změní rezonanční frekvence střídavého sériového obvodu, když se kapacita zapojeného kondenzátoru zvětší třikrát a indukčnost cívky se sníží o třetinu?

Původní frekvence obvodu: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$.

Nová frekvence: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Vyjádříme nové hodnoty pomocí původních:

- třikrát větší kapacita $\Rightarrow C = 3 C_0$,
- indukčnost o třetinu nižší $\Rightarrow L = L_0 - \frac{1}{3} L_0 = \frac{2}{3} L_0$.

Dosadíme do vztahu pro frekvenci:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{2}{3} L_0 3 C_0}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

Pro novou frekvenci platí vztah $f = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$.

Př. 6: Urči kapacitu kondenzátoru, který je třeba zapojit sériově se žárovkou 6,3 V / 100 mA, aby po připojení k síťovému napětí 230 V 50 Hz žárovka svítila na svých jmenovitých hodnotách.

Připojením kondenzátoru vznikne sériový střídavý obvod $\Rightarrow$ potřebujeme znát odpor svítící žárovky, který určíme ze jmenovitých hodnot.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6,3}{0,1} \Omega = 63 \Omega$$

Po připojení obvodu k síťovému napětí má obvodem procházet proud 100 mA $\Rightarrow$ celková impedance: $Z = \frac{U}{I} = \frac{230}{0,1} \Omega = 2300 \Omega$.

Ze vztahu pro celkovou impedanci určíme kapacitanci a z kapacitance kapacitu kondenzátoru.

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \Rightarrow X_C = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{Z^2 - R^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \sqrt{2300^2 - 63^2}} \text{ F} = 1,38 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 1,38 \mu\text{F}$$

K žárovce musíme sériově připojit kondenzátor o kapacitě $1,38 \mu\text{F}$.

Př. 7: Urči frekvenci, při které bude v sériovém sériového obvodu s reálnou cívkou $2,5 \Omega$, $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $50 \mu\text{F}$ fázový rozdíl mezi napětím a proudem 45° (napětí předbíhá proud). Výsledek dopředu odhadni na základě příkladů z minulé hodiny.

Napětí předbíhá proud $\Rightarrow$ indukance je větší než kapacitance.

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 1$$

Hledaná frekvence musí být vyšší než rezonanční frekvence 205 Hz a menší než frekvence 300 Hz (při této frekvenci je fázový posun více než 78°).

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$

$$\omega^2 LC - 1 = R \omega C$$

$$\omega^2 LC - R \omega C - 1 = 0 \text{ kvadratická rovnice} \Rightarrow \text{dosadíme a vypočteme pomocí vzorce.}$$

$$\omega^2 0,012 \cdot 50 \cdot 10^{-6} - 2,5 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \omega - 1 = 0 \quad / \quad 10^6$$

$$0,6 \omega^2 - 125 \cdot \omega - 10^6 = 0$$

$$\omega_1 = -1191 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (zjevně nereálné)}, \quad \omega_2 = 1399 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1399}{2 \cdot \pi} \text{ Hz} = 223 \text{ Hz}$$

Fázový rozdíl 45° mezi napětím a proudem se ve zkoumaném obvodu objeví při frekvenci 223 Hz.

Shrnutí: Kapacitance kondenzátoru s frekvencí klesá, indukance cívky s frekvencí roste $\Rightarrow$ při určité frekvenci je celková impedance sériového RLC obvodu minimální – nastává rezonance, obvodem prochází maximální proud s nulovým fázovým posunem vůči napětí zdroje.